

Lista zadań nr 2
Statystyka Matematyczna
II rok Inżynierii Bezpieczeństwa / Inżynierii Środowiska / Gospodarki Wodnej
(semestr 3, studia stacjonarne 1-go stopnia)

1. Rozważamy doświadczenie **D**, polegające na obserwacji **liczby** i **masy** pojazdów, znajdujących się w określonej chwili na moście. W tym eksperymencie zakładamy, że maksymalna liczba pojazdów, jaką obserwator może zarejestrować na tym moście, wynosi **3**, natomiast maksymalna masa pojedynczego pojazdu możliwa do stwierdzenia z dokładnością do **1 tony** wynosi **5 ton a minimalna 2 tony**. Zaproponuj i skonstruuj przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \sim D$ tzn. związaną z doświadczeniem **D**. Następnie opisz za pomocą zdarzeń elementarnych ω , następujące zdarzenia:

- a) A – liczba pojazdów będzie mniejsza niż 2 pojazdy
- b) B – całkowita masa pojazdów wyniesie co najmniej 10 ton
- c) C – zaobserwowano 2 pojazdy o maksymalnej masie
- d) $E = B \cap C$ (lub krótko BC) , e) $F = B \cup C$, f) $A' B'$ (lub $A^c B^c$) .

Zaproponuj , jak mierzyć (określić) prawdopodobieństwo powyższych zdarzeń losowych ?

Jak zmieni się przestrzeń zdarzeń losowych, jeśli obserwator będzie rejestrował liczbę pojazdów i łączną masę pojazdów znajdujących się w danym momencie na moście?

2. Trzyletnie dziecko bawi się 10-cioma klockami z wrytymi literami: **A, A, K, S, S, T, T, T, Y, Y** i układa je w rzędzie. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ułoży słowo „**STATYSTYKA**”. Czy to zdarzenie jest bardziej prawdopodobne od zdarzenia losowego wytypowania 5-ciu liczb spośród 42 kolejnych liczb naturalnych (nagroda I-go stopnia w „Express Lotku”).

3. Z partii **N** sztuk pewnego towaru, wśród których jest **M** sztuk z godnych z normą losujemy **n** sztuk a) **be** zwrotu i b) **ze** zwrotem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się dokładnie **k** sztuk zgodnych z normą.

4. Na szczyt góry prowadzi siedem dróg. Każda z nich nadaje się również do zejścia. Zakładamy, że wszystkie trasy są równorzędne. Dwaj turyści są na szczycie góry, a dwaj u jej podnóża. Każdy z turystów schodzących zna tylko jednego z wchodzących i odwrotnie. Oblicz prawdopodobieństwo spotkania się dwóch znajomych, z których jeden wchodzi na szczyt, a drugi jest w drodze powrotnej.

5. Niech prawdopodobieństwo tego, że statystyczny student nie jest przygotowany do ćwiczeń, wynosi $1/3$. prowadzący ćwiczenia wybiera **5** osób. Oznaczmy przez **X** liczbę osób, spośród wybranych, które nie są przygotowane do ćwiczeń (osobę nieprzygotowaną możemy zakodować jako **1** (umownie sukces), a w przeciwnym wypadku jako **0**).

- a) Określ rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej **X**
- b) Wyznacz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów, jeżeli losowo wybrana grupa z większej podpopulacji liczy **n=27** osób, następnie **n=35** osób. Podaj rozwiązanie dla dowolnej wartości **n**.

6. Prom kursuje pomiędzy przystaniami A i B, znajdującymi się na dwu przeciwległych brzegach rzeki i odległymi od siebie o **k** metrów. Wiadomo, że prawdopodobieństwo $P(A)$ znajdowania się promu na przystani A wynosi 0.1, a na przystani B, $P(B) = 0.2$. Ponadto prom jeździ ze stałą szybkością, nie zatrzymuje się na rzece (poza przystaniami) i prawdopodobieństwo, tego że znajduje się na rzece wynosi 0.7. Niech **X** oznacza odległość promu od przystani A.

- a) znaleźć dystrybuantę F_X zmiennej losowej **X**
- b) obliczyć wartość oczekiwaną $E(X)$, wariancję $Var(X)$, medianę $Me(X)$ oraz odległość międzykwartylową $d_Q = (Q_3 - Q_1)/2$.

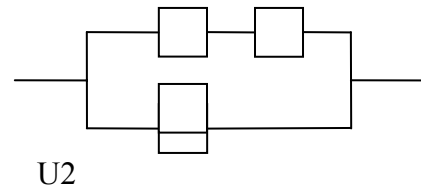
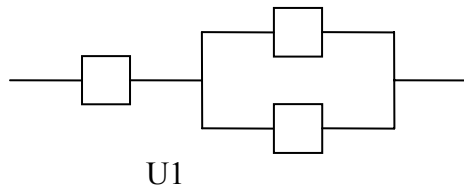
7. W pęku **n** podobnych kluczy jest tylko jeden klucz otwierający zamek. Niech p_k oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A_k , polegającego na tym, że otworzyliśmy zamek za **k**-tym razem. Udowodnić, że $P(A_k) = 1/n$, zatem nie zależy od **k**.

8. (O zdarzeniach niezależnych i warunkowych). Wykazać, że gdy:

- a) zdarzenia A i B są niezależne, to również niezależne są zdarzenia przeciwne A' (A^c) i B' (B^c).
- b) $P(B) > 0$ i $A \subseteq B \Rightarrow$ prawdopodobieństwo warunkowe $P(A | B) = P(A)/P(B)$.

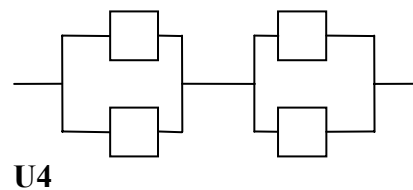
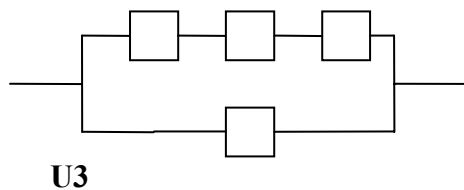
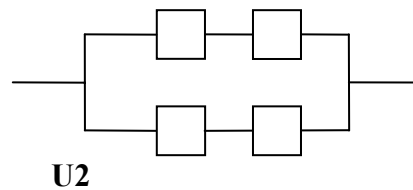
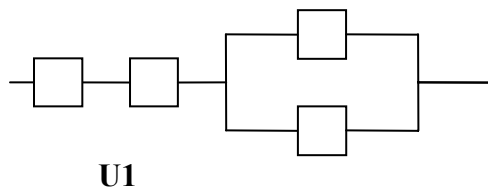
9. (O układach elektrycznych - n elementów układu łączymy równolegle lub szeregowo).

a) Rysunek poniżej przedstawia dwa schematy fragmentów sieci elektrycznych dla trzech żarówek. Prawdopodobieństwo nieprzepalania się w czasie t godzin jest dla wszystkich żarówek jednakowe i wynosi $p \in (0 ; 1)$. Zakładając, że żarówki przepalają się niezależnie od siebie, obliczyć prawdopodobieństwo ciągłego przepływu prądu w czasie t dla każdego układu $U1$ i $U2$ i wybrać ten układ, który jest bardziej niezawodny (uzasadnić wybór).



b) Rozważmy teraz układ 4-ech elementów przy tych samych założeniach jak w punkcie a).

Wyznacz funkcje niezawodności $f(p)$ (jako prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy) dla każdego układu: $U1$, $U2$, $U3$, $U4$ i uszereguj je rosnąco wg wartości funkcji $f(p)$, gdzie $p \in (0 ; 1)$.



Pytanie dodatkowe: jeśli $n=3$ możemy wyróżnić 4 różne schematy połączeń , a ile takich różnych układów możemy zbudować dla $n=4$, a ile dla $n=5$.

10. (O kodowaniu informacji, przesyłaniu i przekłamaniach ich odbioru).

Zakładamy, że kanałem łączności nadaje się tylko 3 rodzaje sygnałów złożonych z liter: AAAA, BBBB, CCCC odpowiednio z prawdopodobieństwami 0.4; 0.3; 0.3. Litery te (sygnały) podlegają w czasie transmisji niezależnie losowym zakłóceniom (przekłamaniom), w rezultacie czego np. litera A może zostać odebrana jako B albo C (zamiast właściwego sygnału A. Prawdopodobieństwa poprawnego przesłania albo przekłamania podaje poniższa tabela

Sygnały nadane	Sygnały odebrane		
	A	B	C
A	0.8	0.1	0.1
B	0.1	0.8	0.1
C	0.1	0.1	0.8

a) Znaleźć prawdopodobieństwo odebrania na wyjściu sygnału :

a₁) AAAA , a₂) ACAA , a₃) CCCC, a₄) ABCA .

b) Na wyjściu odebrano sygnał ACAA, obliczyć prawdopodobieństwo, że został on nadany jako sygnał AAAA.

c) Na wyjściu odebrano sygnał AAAA, obliczyć prawdopodobieństwo, że został on wysłany również jako sygnał AAAA.

11. Niech $f(x, \mu, \sigma)$ będzie funkcją gęstości rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ postaci:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \text{ Podaj interpretację probabilistyczną parametrów}$$

μ i σ^2 oraz przedziałów zmienności: $(\mu - \sigma ; \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma)$.

12. Wytrzymałość lin stalowych pochodzących z masowej produkcji jest zmienna losową X o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma) = N(100\text{MPa}, 5\text{MPa})$. Obliczyć:

- ile przeciętnie lin spośród 1000 ma wytrzymałość mniejszą niż 90 MPa?
- co która przeciętnie lina ma wytrzymałość mniejszą niż 90 MPa?
- ile przeciętnie lin spośród 1000 ma wytrzymałość określoną przez przedział $[Q_1, Q_3]$; wyznacz go.

13. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(\mu, \sigma) = N(2, 3)$. Oblicz zadane prawdopodobieństwa: a) $P(|X| < 1)$, b) $P(2X > 0.5)$, c) $P(|X| > 8)$. Obliczenia wykonaj dla zmiennej losowej standaryzowanej (! przykładowe zadanie na egzamin z wykorzystaniem tablic statystycznych).

14. Dla jakiej wartości A następujące funkcje są gęstościami pewnych zmiennych losowych:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2A}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^4} & \text{dla } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

Naszkieować obie funkcje i porównać z gęstością rozkładu normalnego standardowego $N(0,1)$. Wyznaczyć ich wartości oczekiwane i wariancje.

15. Czas T bezawaryjnej pracy pewnego urządzenia ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda=0.2$. Obliczyć:

- wartość przeciętną i wariancję bezawaryjnego czasu pracy urządzenia
- medianę i odległość międzykwartylową
- prawdopodobieństwo, że czas bezawaryjnej pracy urządzenia wyniesie co najmniej 5 jednostek czasowych zmiennej losowej T .

Uwaga! Student we własnym zakresie zapozna się z podstawowymi elementami kombinatoryki:

- permutacje** bez powtórzeń i z powtórzeniami
- wariacje** bez powtórzeń i z powtórzeniami
- kombinacje** bez powtórzeń i z powtórzeniami

Np. w oparciu o pozycję

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach.

Część I. *Rachunek prawdopodobieństwa*, Krywicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., PWN, Warszawa, 1993, Wyd.III. **strony 32-34.**

Wybrał i opracował dr hab. Andrzej Michalski