

Zmienne losowe typu ciągłego

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

rok akademicki 2022/2023

Pole trapezu krzywoliniowego

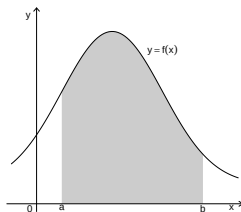
Figurę ograniczoną przez:

wykres funkcji $y = f(x)$, gdzie f jest funkcją ciągłą i nieujemną na $[a, b]$;

proste $x = a$, $x = b$, $a < b$,

oś OX (tj. prostą $y = 0$)

będziemy nazywać *trapezem krzywoliniowym* (odpowiadającym funkcji f oraz odcinkowi $[a, b]$).



Zbiór ograniczony

- a) wykresem funkcji $y = f(x)$, gdzie f jest funkcją nieujemną na $[a, b]$;
- b) prostymi $x = a$, $x = b$, $a < b$,
- c) osią OX (tj. prostą $y = 0$)

dla którego można określić pole będziemy nazywać uogólnionym trapezem krzywoliniowym.

Pole zbioru określonego przez warunki a)-c) istnieje, gdy:

- (i) f jest ciągła na $[a, b]$;
- (ii) f jest ograniczona i ma skończoną liczbę punktów nieciągłości na $[a, b]$;
- (iii) f jest ograniczona i zbiór jej punktów nieciągłości jest nieskończony ale nieistotny (por. : P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, Wyd. 1, PWN 1987, rozdz. 1).

Zmienne losowe typu ciągłego

Definicja 1

Mówimy, że zmienna losowa X jest typu ciągłego, jeśli istnieje nieujemna funkcja g taka, że dla każdych $a < b$ prawdopodobieństwo $P(a < X < b)$ jest równe polu uogólnionego trapezu krzywoliniowego odpowiadającego funkcji g i odcinkowi $[a, b]$.

Zmienna o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[min, max]$

Przykładem zmiennej losowej typu ciągłego jest zmienna o rozkładzie jednostajny na odcinku $[min, max]$ (oznaczenie: $U(min, max)$). Jego funkcja gęstości u dana jest wzorem

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{max-min}, & \text{jeśli } min \leq x \leq max, \\ 0 & \text{jeśli } x < min \text{ lub } x > max. \end{cases}$$

Zmienna losowa o tym rozkładzie, gdy $min = 0$ i $max = 1$, może opisywać np. czas oczekiwania na autobus A , odjeżdżający do miejscowości B co godzinę, przez pasażera C ; zakładamy, że C nie zna rozkładu jazdy dla tej linii i że przychodzi na przystanek w losowym momencie.

Rozkład jednostajny na odcinku $[min, max]$ -przykład obliczeń

Czas oczekiwania na autobus- zmienna losowa $Y \sim U(0, 1)$.
Prawdopodobieństwo $P(\frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2})$ jest równe:

$$P\left(\frac{1}{3} < Y < \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

Prawdopodobieństwo jest równe iloczynowi długości podstawy $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$ i wysokości równej 1 odpowiedniego prostokąta.

Jeżeli $Y \sim U(10, 20)$, to

$$P(12 < Y < 15) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Prawdopodobieństwa odpowiadające nierównościom ostrym i słabym

Dla zmiennej losowej X o rozkładzie typu ciągłego mamy:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

Rozkład normalny

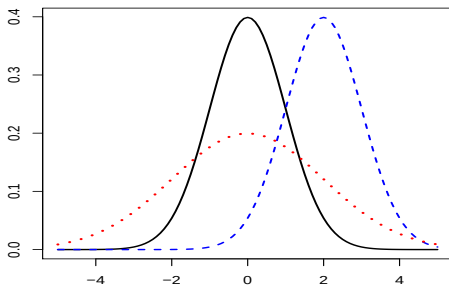
Szczególnie ważnym w zastosowaniach jest rozkład normalny.

Definicja 2

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład normalny z parametrami μ i σ , gdzie $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, jeżeli gęstość jej rozkładu jest określona wzorem:

$$\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Skrótowy zapis: $X \sim N(\mu, \sigma)$. Dla $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ będziemy pisać zamiast $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ krótko $\phi(x)$.



Rysunek: Wykresy gęstości rozkładów normalnych: $N(0, 1)$ (linia ciągła), $N(0, 2)$ (linia „kropkowana”), $N(2, 1)$ (linia „kreskowana”).

Rozkład normalny— zastosowania

Wiele cech (zmiennych losowych) w życiu gospodarczym, w świecie przyrody ma rozkład zbliżony do normalnego.

Wynika to z tzw. centralnego twierdzenia granicznego, z którego wynika, że średnia $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, ma rozkład zbliżony do normalnego $N(\mu, \sigma)$ dla pewnych μ i σ .

Przykład

Można oczekiwać, że suma wydatków 20 kolejnych klientów w sklepie ma rozkład zbliżony do rozkładu normalnego z odpowiednimi parametrami.

Liczba wyrzuconych orłów w długiej serii rzutów ma rozkład zbliżony do normalnego.

Wzrost dorosłych mężczyzn w danym kraju ma rozkład zbliżony do normalnego.

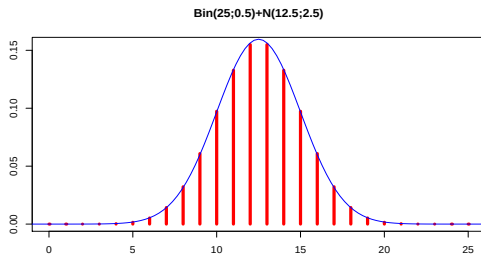
Wiele cech w życiu przyrodniczym ma rozkład zbliżony do normalnego.

Przykład

Rzucamy monetą 25 razy. Niech Y oznacza liczbę orłów. X ma rozkład $\text{Bin}(25; 0,5)$. Zmienna Y może być przedstawiona jako suma 25 niezależnych zmiennych losowych $X_1, \dots, X_{25}$ o rozkładzie $\text{Bin}(1; 0,5)$.

Z tzw. Centralnego Twierdzenia Granicznego wynika, że

Y ma w przybliżeniu rozkład $N(12,5; 2,5)$



Rysunek: Rozkład dwumianowy $\text{Bin}(25; 0,5)$ i odpowiadający mu rozkład normalny $N(12,5; 2,5)$

Zmienna losowa o rozkładzie normalnym — zastosowania

Czy mechanizm, który tłumaczy zmienność takiej cechy, jak wzrost dorosłych mężczyzn w danym kraju, jest podobny do mechanizmu, który tłumaczy zmienność wyników doświadczenia, które polega na 25-krotnym rzucie monetą? Odpowiedź jest twierdząca. Mechanizm tłumaczący zmienność cech takich, jak wzrost dorosłych mężczyzn w danym państwie: trochę bardziej skomplikowany -por. książkę:
Grinstead and Snell's Introduction to Probability Theory

<https://math.dartmouth.edu/~prob/prob/prob.pdf>

Obliczanie prawdopodobieństw w rozkładzie zdarzeń określonych przez zmienną losową o rozkładzie normalnym

Niech X oznacza wzrost dorosłych mężczyzn w państwie A; zakładamy, że $X \sim N(177, 10)$.

Chcemy obliczyć: (a) $P(174 < X < 182)$, (b) $P(X > 182)$.

Obliczenia dla (a) w R-rze:

```
> pnorm(182,177,10) - pnorm(174,177,10)
[1] 0.3093739
```

Obliczenia dla (b) w R-rze:

```
> 1-pnorm(182,177,10)
[1] 0.3085375
```

Wartość oczekiwana i wariancja dla zmiennych losowych typu ciągłego

środek ciężkości pręta położonego wzdłuż osi OX o gęstości g :
wartość oczekiwana zmiennej losowej X z gęstością g
(oznaczenie: $E(X)$ lub μ_X).

Wariancja zmiennej X : $Var(X) = E(X - \mu_X)^2$.

Odchylenie standardowe zmiennej X : $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

Zamiast σ_X niektórzy piszą $D(X)$.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej o rozkładzie $U(0, 1)$

Niech $X \sim U(0, 1)$. Funkcja gęstości g jest równa 1 na $[0, 1]$; poza tym przedziałem jest równa 0.

Mamy:

$$E(X) = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{12}.$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej o rozkładzie normalnym

Można pokazać, że jeśli $X \sim N(\mu, \sigma)$, to

$$E(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2, \quad D(X) = \sigma.$$

Lektura uzupełniająca

T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna. Kraków 2004, str. 234–244.

R. Kala, Statystyka dla przyrodników, wydania 3, Wyd. Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu, 2009.

Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, s. 111–118.