

Testowanie hipotez w rodzinie rozkładów normalnych— przypadek znanego odchylenia standardowego

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

r. akad. 2022/2023

Przykład wprowadzający

Przykład X - średnica pewnego detalu stalowego wytwarzanego przez maszynę tokarską A.;

Zakładamy (na podstawie wcześniejszych doświadczeń):

$X \sim N(\theta; 0,1)$; (jednostka-milimetr);

Maszyna powinna produkować detale o szerokości średniej szerokości $\theta_0 = 7,5$.

Mamy uzasadnione podejrzenia, że maszyna, po wielu miesiącach użytkowania bez konserwacji, uległa rozregulowaniu i przeciętna wartość średnicy produkowanych detali jest w obecnym czasie większa niż 7,5.

Sformułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej

Interesuje nas sprawdzenie hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$, gdzie $\theta_0 = 7,5$ (jednostka: milimetr.)

Chcemy sprawdzić, czy zużycie noża maszyny tokarskiej nie spowodowało zwiększenia wartości średnic θ . Stąd hipoteza alternatywna: $H_1 : \theta > \theta_0$.

Statystyka testowa i jej rozkład

Zakładamy, że nasze pomiary stanowią realizację próby prostej X_1, X_2, \dots, X_n , gdzie $X_i \sim N(\theta; \sigma)$; w naszym przykładzie $\sigma = 0,1$.

Chcemy „procedurę testową” oprzeć na zmiennej losowej (tzw. *statystyce testowej*)

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Przy założeniu prawdziwości H_0 zmienna Z ma wartość oczekiwaną równą 0 — wynika to stąd, że wartość oczekiwana średniej próbkowej \bar{X} jest równa θ_0 . Można pokazać, że przy założeniu prawdziwości H_0 odchylenie standardowe Z jest równe 1.

Czy można precyzyjnie określić rozkład \bar{X} oraz Z ?

Rozkład średniej próbkowej

Twierdzenie 1

Jeżeli X_1, X_2, \dots, X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(\theta; \sigma)$ to średnia \bar{X} ma rozkład $N(\theta; \sigma/\sqrt{n})$

Wniosek: zmienna losowa Z określona przez

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

ma rozkład $N(0, 1)$ przy założeniu prawdziwości H_0 .

Obszar krytyczny

Problem: jakie wartości statystyki Z należy uznać za nietypowe?

Niech $z_{1-\alpha}$ oznacza kwantyl rzędu $1 - \alpha$ rozkładu normalnego, tj. rozwiązanie równania:

$$\Phi(x) = 1 - \alpha,$$

gdzie jest ustaloną liczbą z przedziału $(0, 1)$ — zazwyczaj przyjmujemy w zagadnieniach testowania hipotez $\alpha = 0,05$ lub $\alpha = 0,01$; α jest tzw. poziomem istotności testowania hipotezy. Określmy zbiór krytyczny dla zadanego α dla hipotezy alternatywnej $H_1 : \theta \neq \theta_0$ przez:

$$C = \{z : z \geq z_{1-\alpha}\}.$$

Test dla weryfikacji H_0 przy alternatywie H_1 : przyjmij H_0 , gdy $Z \notin C$, odrzuć H_0 , gdy $Z \in C$, z- wartość statystyki Z dla konkretnych danych.

Przykład z detalami metalowymi— obliczenia

z - oznacza realizację statystyki testowej Z .

\bar{x} oznacza realizację statystyki \bar{X}

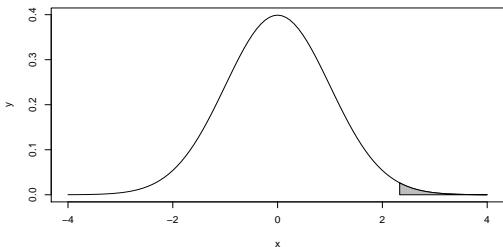
Dla $n = 50$ pomiarów x_1, x_2, \dots, x_{50} otrzymaliśmy $\bar{x} = 7,515$;
stąd

$$z = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{7,515 - 7,5}{0,1/\sqrt{50}} \approx 1,06.$$

Dla poziomu istotności $\alpha = 0,01$ zbiór krytyczny C ma postać

$$[z_{0,99}, \infty) = [2,33; \infty),$$

a więc nie ma podstaw do odrzucenia H_0 i przyjęcia H_1 .



Rysunek: Wykres gęstości rozkładu $N(0, 1)$; pole zacięniowanego „trapezu krzywoliniowego” jest równe 0,01

Podstawa „nieskończonego trapezu”: $[2,33; \infty)$ - to obszar krytyczny (w przykładzie "średnice detali metalowych")

Uwagi nt. obliczania kwantyli r. normalnego

Definicja 1

Kwantylem rzędu u , $u \in (0, 1)$, rozkładu normalnego $N(0, 1)$ będziemy nazywać liczbę z_u spełniającą równość:

$$\Phi(z_u) = u.$$

Kwantyle rozkładu normalnego $N(0, 1)$ można obliczać „przeszukując” tablicę wartości funkcji Φ , odczytać z tablicy kwantyli lub obliczyć korzystając z odpowiedniego programu komputerowego— np. wydając polecenie `qnorm` w R-rze. Wartość $z_{0,99}$ można obliczyć w R-rze w następujący sposób:

```
> qnorm(0.99)
[1] 2.326348
```

W pakiecie Statistica kwantyl ten można obliczyć przy użyciu kalkulatora prawdopodobieństwa.

Testowanie hipotezy o proporcji

Jeśli w naszym przykładzie hipotezę H_1 zastąpić przez hipotezę lewostronną $H_1' : \theta < \theta_0$, to obszar krytyczny będzie miał postać:

$$(-\infty, z_\alpha],$$

w przypadku hipotezy alternatywnej 2-stronnej $H_1'' : \theta \neq \theta_0$, obszar krytyczny będzie miał postać:

$$(-\infty, z_{\alpha/2}] \cup [z_{1-\alpha/2}, \infty).$$

Testowanie hipotezy o proporcji

W państwie P w roku 2000 procent ludzi żyjących w ubóstwie (poverty rate- w skrócie PR) wynosił 11,3 a w 2008 roku: 12,7. Dane dotyczące 2000 roku są dokładne (pochodzą ze spisu powszechnego), dane dotyczące 2008 roku oparte są na rezultatach badań sondażowych, przeprowadzonych dla reprezentatywnej 10000-elementowej próby respondentów. Czy są podstawy aby sądzić, że PR istotnie wzrósł przez ostatnie 8 lat?

Testowanie hipotezy o proporcji- formalizacja problemu

Doświadczenie losowe polega na wyborze losowym mieszkańca P ; jeśli ten mieszkaniec żyje w ubóstwie, wtedy wartość X jest równa 1, jeśli nie żyje w ubóstwie, wtedy wartość X wynosi 0.

Zakładamy, że odpowiedzi (dotyczące ubóstwa respondentów) otrzymane w 2008 roku stanowią realizację próby prostej z rozkładu $Bin(1, p)$.

Chcemy zweryfikować

$$H_0 : p = p_0 \text{ przeciw } H_1 : p > p_0;$$

w naszym przykładzie $p_0 = 11,3$.

Testowanie hipotezy o proporcji— c.d.

Niech Y — liczba żyjących w ubóstwie— spośród $n = 10000$ ankietowanych.

Zauważmy, że $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, gdzie $X_i \sim \text{Bin}(1, p)$
Z centralnego twierdzenia granicznego: przy założeniu prawdziwości H_0

$Y_1 = \frac{Y}{n} = \bar{X}$ ma w przybliżeniu rozkład $N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$,
a statystyka testowa Z

$$Z = \frac{Y_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

ma w przybliżeniu rozkład normalny $N(0, 1)$.

Obszary krytyczne: lewostronny, prawostronny i dwustronny obliczamy tak jak w przypadku testowania hipotez w rodzinie rozkładów normalnych (gdy odchylenie standardowe jest znane).

Przykład „Procent ubóstwa w P”— c.d.

Przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0,05$. Obszar krytyczny— dla hipotezy prawostronnej $H_1 : p > p_0 = 0,113$ ma postać:

$$[z_{0.95}, \infty) = [1,644854, \infty).$$

Wartość statystyki testowej Z dla naszych danych jest równa 4.422084

Można ją obliczyć w R-rze następująco:

```
> (0.127-0.113) / (sqrt((0.113*(1-0.113))/10000))  
[1] 4.422084
```

lub w arkuszu kalkulacyjnym takim jak Calc w pakiecie Libre Office:

$$=(0,127-0,113) / (\text{PIERWIASTEK}((0,113*(1-0,113))/10000))$$

a więc są podstawy, aby odrzucić H_0 i przyjąć H_1 .