Wykład 4. Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa

dr Mariusz Grządziel

Katedra Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

r. akad. 2022/2023

Populacja i próba

Populacja- zbiorowość skończona lub nieskończona, w stosunku do której mają być formułowane wnioski.
Próba- skończony podzbiór populacji podlegający szczegółowemu badaniu.

Doświadczenie losowe

Losowo wybrana próba z populacji— odpowiada doświadczeniu losowemu.
Doświadczenie nazywamy losowym, jeśli:

- może być powtarzane (w zasadzie) w tych samych warunkach;
- wynik jego nie może być przewidziany w sposób pewny;
- zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia jest określony przed przeprowadzeniem doświadczenia.

Przykłady doświadczeń losowych

- przynależność wyznaniowa losowo wybranego mieszkańca Warszawy;
- rezultat dwukrotnego rzutu monetą;
- stężenie cynku w wodach podziemnych w danym miejscu w losowo wybranym momencie.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Definicja 1

Przestrzenią zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Pojedynczy element tej przestrzeni nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym.

Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych o skończonej liczbie elementów będziemy nazywać zdarzeniem. W przypadku przestrzeni zdarzeń elementarnych o nieskończonej liczbie elementów, zdarzeniem nazywamy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych spełniający pewne dodatkowe założenia.
Uwaga. Niektórzy autorzy określają zdarzenie jako dowolny podzbiór przesztrzeni zdarzeń elementarnych (jest to sensowne uproszczenie — dla celów dydaktycznych).

Przestrzeń zdarzeń elementarnych- przykłady

Przestrzenią zdarzeń elementarnych dla doświadczenia losowego :

- polegającego na losowym wyborze mieszkania, oferowanego do sprzedaży, i podaniu jego ceny jest $[0, \infty)$;
- polegającego na dwukrotnym rzucie monetą jest $\{OO, OR, RO, RR\}$; zapis OO oznacza: orzeł wypadł w pierwszym i drugim rzucie itd.;
- polegającego na dwukrotnym rzucie kostką jest $\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$.

Czym jest prawdopodobieństwo

Podejście częstościowe: rzucając monetą (uczciwą) N razy otrzymujemy n orłów— można oczekiwać, że n/N będzie dążyć do $1/2$ gdy $N \to \infty$
Podejście aksjomatyczne: każdemu zdarzeniu A, będącemu podzbiorowi przestrzeni zdarzeń elementarnych $\mathcal{S}$ przyporządkowujemy liczbę $P(A)$, spełniającą warunki:

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
- gdy $A = \emptyset$, $P(A) = 0$;
- gdy $A = \mathcal{S}$, $P(A) = 1$;
- Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ się wzajemnie wykluczają (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) i suma $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ jest zdarzeniem, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots.$$

Prawdopodobieństwo— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką. Jakie jest prawdopodobieńtwo, że suma oczek będzie mniejsza lub równa 3.
W naszym przypadku $\mathcal{S} = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$; przyjmujemy, że prawdopodobieństwo wszystkich zdarzeń elementarnych jest równe $\frac{1}{6\times 6} = \frac{1}{36}$. Zdarzenie A, odpowiadające wyrzuceniu nie więcej niż 3 oczek, ma postać:
$A = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.
Stąd $P(A) = 3 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.

Założenie o jednakowym prawdopodobieństwie zdarzeń elementarnych

Uwaga. Z formalnego punktu widzenia moglibyśmy przyjąć w rozważanym przykładzie np.

$$P((1,1)) = P((1,2)) = \frac{1}{2}, \quad P((1,3)) = P((1,4)) = \ldots = P((6,6)) = 0,$$

lecz otrzymany w ten sposób model matematyczny nie będzie „sensownie” opisywał naszego doświadczenia losowego.

Stosowalność przestrzeni elementarnych, w których wszystkie elementy mają jednakowe prawdopodobieństwo, jest prawie całkowicie ograniczona do gier hazardowych i kombinatoryki (por. W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, tom 1, wydanie 4, PWN 1980).

Prawdopodobieństwo, że nowonarodzone niemowlę jest chłopcem: raczej nie jest równe $1/2$.

Niezależność zdarzeń

Niezależność zdarzeń wiążemy z brakiem zależności przyczynowo- skutkowej.
Można uznać za niezależne:

- wyniki kolejnych rzutów kostką;
- ustanowienie rekordu świata w skoku w dal na najbliższej olimpiadzie i utworzenie nowego województwa do końca bieżącego roku

Definicja 2

Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Niezależność dla więcej niż dwóch zdarzeń— patrz [KM01],Definicja 2.7.

Niezależność zdarzeń— przykłady

W przykładzie z rzutem dwoma kostkami:
zdarzenie A— „wynik pierwszego rzutu jest równy jeden” i
zdarzenie B—„wynik drugiego rzutu jest równy 5”
są niezależne, gdyż

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6} \text{ oraz } P(A \cap B) = P((1,5)) = \frac{1}{36}.$$

Pojęcie zmiennej losowej

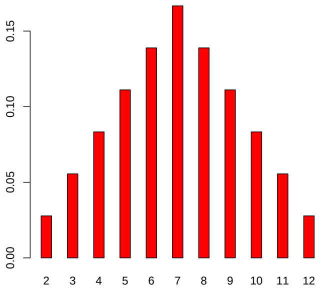
Nieformalne określenie— wynik liczbowy doświadczenia losowego.
Przykładami zmiennej losowej są:
suma oczek otrzymanych po dwukrotnym rzucie kostką;
cena losowo wybranego mieszkania (z listy mieszkań oferowanych do sprzedaży);
temperatura człowieka, zmierzona w losowo wybranej chwili.
Precyzyjne określenie zmiennej losowej-przypadek, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona:
funkcja określona na przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Zmienna losowa— przykład

Rzucamy dwukrotnie kostką.
Niech X — suma oczek;
X— przykład zmiennej losowej.
X przyjmuje wartości $2, 3, \ldots, 11, 12$ z prawdopodobieństwami:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Funkcja przyporządkowująca $k \in \{2, 3, \ldots, 11, 12\}$ prawdopodobieństwo $P(X = k)$— rozkład zmiennej X.
Notacja: $X = k$—zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) = k$.
Analogicznie: $X < k$—zbiór zdarzeń elementarnych ω takich, że $X(\omega) < k$.



Rysunek: Wykres słupkowy przedstawiający rozkład zmiennej losowej X, sumy oczek otrzymanych w dwukrotnym rzucie kostką

Lektura uzupełniająca

T. Bednarski, Elementy matematyki w naukach ekonomicznych. Oficyna ekonomiczna. Kraków 2004, str. 218–228 [zwracam uwagę na różnicę pomiędzy pojęciami *próby losowej*, zdefiniowanej na str. 221, a pojęciem *próby*, zdefiniwanym podczas dzisiejszego wykładu!]

Koronacki, J., Mielniczuk, J. Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych. WNT. Warszawa 2001, podrozdział 2.1.2, str. 62-79.